Diferencijalne jednačine. Diferencijalne jednačine prvog reda.

Nevena Mijajlović

Energetika i automatika, Elektronika, telekomunikacije i računarstvo; ETF

Matematika 3

- Široka primjena diferencijalnih jednačina (DJ) u prirodnim naukama i tehnici

- Široka primjena diferencijalnih jednačina (DJ) u prirodnim naukama i tehnici
- Za razliku od algebarskih jednačina gdje su nepoznate brojevi, DJ se odnose na širu klasu funkcionalnih jednačina gdje je nepoznata funkcija (skalarna ili vektorska), zadata na nekom intervalu.

- Široka primjena diferencijalnih jednačina (DJ) u prirodnim naukama i tehnici
- Za razliku od algebarskih jednačina gdje su nepoznate brojevi, DJ se odnose na širu klasu funkcionalnih jednačina gdje je nepoznata funkcija (skalarna ili vektorska), zadata na nekom intervalu.
- Primjer: $y'(t) = y(t)$?

- Široka primjena diferencijalnih jednačina (DJ) u prirodnim naukama i tehnici
- Za razliku od algebarskih jednačina gdje su nepoznate brojevi, DJ se odnose na širu klasu funkcionalnih jednačina gdje je nepoznata funkcija (skalarna ili vektorska), zadata na nekom intervalu.
- Primjer: $y'(t) = y(t)$?
  $y(t) = e^t$ - rješenje. Da li postoje druge funkcije sa ovim svojstvom?

- Široka primjena diferencijalnih jednačina (DJ) u prirodnim naukama i tehnici
- Za razliku od algebarskih jednačina gdje su nepoznate brojevi, DJ se odnose na širu klasu funkcionalnih jednačina gdje je nepoznata funkcija (skalarna ili vektorska), zadata na nekom intervalu.
- Primjer: $y'(t) = y(t)$?
  $y(t) = e^t$ - rješenje. Da li postoje druge funkcije sa ovim svojstvom? Očigledno, $y(t) = Ce^t, \forall C \in \mathbb{R}$

- Široka primjena diferencijalnih jednačina (DJ) u prirodnim naukama i tehnici
- Za razliku od algebarskih jednačina gdje su nepoznate brojevi, DJ se odnose na širu klasu funkcionalnih jednačina gdje je nepoznata funkcija (skalarna ili vektorska), zadata na nekom intervalu.
- Primjer: $y'(t) = y(t)$?
  $y(t) = e^t$ - rješenje. Da li postoje druge funkcije sa ovim svojstvom? Očigledno, $y(t) = Ce^t, \forall C \in \mathbb{R}$

- Da bi se razumjeli i istraživali problemi u vezi sa kretanjem tečnosti, protokom struje u električnim poljima, rasipanjem toplote u čvrstim objektima, detekcija seizmičkih talasa, ili smanjenje ili porast populacije, i mnogi drugi, neophodno je poznavati DJ.

- Da bi se razumjeli i istraživali problemi u vezi sa kretanjem tečnosti, protokom struje u električnim poljima, rasipanjem toplote u čvrstim objektima, detekcija seizmičkih talasa, ili smanjenje ili porast populacije, i mnogi drugi, neophodno je poznavati DJ.
- DJ su jednačine Njutna i Lagranža u klasničnoj mehanici, Maksvelove jednačine u klasičnoj elektrodinamici, jednačina Šredingera u kvantnoj mehanici, itd.

- Da bi se razumjeli i istraživali problemi u vezi sa kretanjem tečnosti, protokom struje u električnim poljima, rasipanjem toplote u čvrstim objektima, detekcija seizmičkih talasa, ili smanjenje ili porast populacije, i mnogi drugi, neophodno je poznavati DJ.
- DJ su jednačine Njutna i Lagranža u klasničnoj mehanici, Maksvelove jednačine u klasičnoj elektrodinamici, jednačina Šredingera u kvantnoj mehanici, itd.
- Izučavanje DJ uključuje nekoliko etapa:
    1. sastavljanje DJ koja opisuje fizički proces;
    2. nalaženje tačnog ili približnog rješenja DJ;
    3. proučavanje dobijenog rješenja.

Diferencijalna jednačina (DJ) je svaka jednačina u kojoj se javljaju nezavisno promjenljiva t, nepoznata funkcija $y(t)$ i izvodi te funkcije $y', y'', \dots$.

Diferencijalna jednačina (DJ) je svaka jednačina u kojoj se javljaju nezavisno promjenljiva t, nepoznata funkcija $y(t)$ i izvodi te funkcije $y', y'', \ldots$.

Opšti oblik ove jednačine je

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Obične ili parcijalne diferencijalne jednačine

Obične ili parcijalne diferencijalne jednačine

1. Obične DJ: nepoznata funkcija zavisi od jedne nezavisno promjenljive

Obične ili parcijalne diferencijalne jednačine

1. Obične DJ: nepoznata funkcija zavisi od jedne nezavisno promjenljive
   Primjer: $y' = y$

Obične ili parcijalne diferencijalne jednačine

1. Obične DJ: nepoznata funkcija zavisi od jedne nezavisno promjenljive
   Primjer: $y' = y$
2. Parcijalne DJ: nepoznata funkcija zavisi od više nezavisno promjenljivih

Obične ili parcijalne diferencijalne jednačine

1. Obične DJ: nepoznata funkcija zavisi od jedne nezavisno promjenljive
   Primjer: $y' = y$
2. Parcijalne DJ: nepoznata funkcija zavisi od više nezavisno promjenljivih

Jednačina toplotne provodljivosti:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Obične ili parcijalne diferencijalne jednačine

1. Obične DJ: nepoznata funkcija zavisi od jedne nezavisno promjenljive
   Primjer: $y' = y$
2. Parcijalne DJ: nepoznata funkcija zavisi od više nezavisno promjenljivih

Jednačina toplotne provodljivosti:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Talasna jednačina:

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Jedna DJ ili sistem DJ

Zavisi od broja nepoznatih funkcija koje u DJ figurišu.

Jedna DJ ili sistem DJ

Zavisi od broja nepoznatih funkcija koje u DJ figurišu.

- Ako je potrebno odrediti samo jednu nepoznatu funkciju tada nam je dovoljna jedna jednačina.

Jedna DJ ili sistem DJ

Zavisi od broja nepoznatih funkcija koje u DJ figurišu.

- Ako je potrebno odrediti samo jednu nepoznatu funkciju tada nam je dovoljna jedna jednačina.
- Ako imamo dvije ili više nepoznatih funkcija tada nam je neophodan sistem DJ.

Jedna DJ ili sistem DJ

Zavisi od broja nepoznatih funkcija koje u DJ figurišu.

- Ako je potrebno odrediti samo jednu nepoznatu funkciju tada nam je dovoljna jedna jednačina.
- Ako imamo dvije ili više nepoznatih funkcija tada nam je neophodan sistem DJ.

Lotka-Voltera sistem DJ je važan sistem u ekologiji:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy, \end{aligned}$$

$x(t)$ i $y(t)$ su populacije plena i predatora na nekom području.

Red diferencijalne jednačine

Red diferencijalne jednačine

Red DJ je red najvećeg izvoda koji se pojavljuje u toj jednačini.

Red diferencijalne jednačine

Red DJ je red najvećeg izvoda koji se pojavljuje u toj jednačini.

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$$

je obična diferencijalna jednačina n-tog reda.

Red diferencijalne jednačine

Red DJ je red najvećeg izvoda koji se pojavljuje u toj jednačini.

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

je obična diferencijalna jednačina n-tog reda.

Red diferencijalne jednačine

Red DJ je red najvećeg izvoda koji se pojavljuje u toj jednačini.

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$$

je obična diferencijalna jednačina *n*-tog reda.
Uobičajeno je da se piše u obliku

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Red diferencijalne jednačine

Red DJ je red najvećeg izvoda koji se pojavljuje u toj jednačini.

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0$$

je obična diferencijalna jednačina n-tog reda.
Uobičajeno je da se piše u obliku

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Na primjer,

$$y''' - 2ty'' + yy' = 2t$$

je diferencijalna jednačina trećeg reda.

Linearne i nelinearne DJ

Linearne i nelinearne DJ

Jednačina

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

je **linearna DJ** (LDJ) ako je F linearna funkcija po promjenljivim $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Linearne i nelinearne DJ

Jednačina
$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$
je **linearna DJ** (LDJ) ako je F linearna funkcija po promjenljivim $y, y', \dots, y^{(n)}$.
Opšti oblik LDJ n-tog reda je
$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = b(t). \tag{1}$$

Linearne i nelinearne DJ

Jednačina

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

je **linearna DJ** (LDJ) ako je F linearna funkcija po promjenljivim $y, y', \dots, y^{(n)}$.

Opšti oblik LDJ n-tog reda je

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = b(t). \tag{1}$$

Jednačine koje nisu oblika (1) su **nelinearne** DJ.

Opšti oblik DJ prvog reda:

$$F(t, y, y') = 0. \tag{2}$$

Opšti oblik DJ prvog reda:

$$F(t, y, y') = 0. \tag{2}$$

Ako se jednačina (2) može, na jednoznačan način, riješiti po y', tada dobijamo tzv. **normalni oblik** DJ prvog reda:

$$y' = f(t, y). \tag{3}$$

Opšti oblik DJ prvog reda:

$$F(t, y, y') = 0. \tag{2}$$

Ako se jednačina (2) može, na jednoznačan način, riješiti po y', tada dobijamo tzv. **normalni oblik** DJ prvog reda:

$$y' = f(t, y). \tag{3}$$

Simetrični oblik DJ prvog reda

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0 \tag{4}$$

Posmatramo DJ (3) u normalnom obliku

$$y' = f(t, y).$$

Posmatramo DJ (3) u normalnom obliku

$$y' = f(t, y).$$

Funkcija $f(t, y)$ je definisana u oblasti $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}^2_{ty}$ (oblast je otvoren i povezan skup).

Posmatramo DJ (3) u normalnom obliku

$$y' = f(t, y).$$

Funkcija $f(t, y)$ je definisana u oblasti $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}^2_{ty}$ (oblast je otvoren i povezan skup).
Neka je $\mathbb{I}$ interval realnih brojeva.

Rješenje DJ

Funkciju $y = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{I}$ nazivamo rješenjem jednačine (3) ako:

1) $\varphi \in C^1(\mathbb{I})$,
2) $(\forall t \in \mathbb{I})\ (t, \varphi(t)) \in D$,
3) $(\forall t \in \mathbb{I})\ \varphi'(t) \equiv f(t, \varphi(t))$.

- Najjednostavnije DJ već smo rješavali u integralnom računu kada smo nalazili nepoznatu funkciju na osnovu njenog izvoda ili diferencijala:

$$y' = f(t),$$

gdje je $y = y(t)$ nepoznata funkcija, a $f(t)$ zadata neprekidna funkcija.

- Najjednostavnije DJ već smo rješavali u integralnom računu kada smo nalazili nepoznatu funkciju na osnovu njenog izvoda ili diferencijala:

$$y' = f(t),$$

gdje je $y = y(t)$ nepoznata funkcija, a $f(t)$ zadata neprekidna funkcija.

- Nepoznatu funkciju smo odredjivali:

$$y = \int f(t)dt + C.$$

- Najjednostavnije DJ već smo rješavali u integralnom računu kada smo nalazili nepoznatu funkciju na osnovu njenog izvoda ili diferencijala:

$$y' = f(t),$$

gdje je $y = y(t)$ nepoznata funkcija, a $f(t)$ zadata neprekidna funkcija.

- Nepoznatu funkciju smo odredjivali:

$$y = \int f(t)dt + C.$$

- Ako želimo odrediti konstantu C, treba zadati jos jedan uslov (vrijednost funkcije y u nekoj tački x_0 tako da $(x_0, y_0) \in D$):

$$y(t_0) = y_0 \tag{5}$$

Uslov (5) nazivamo **početnim**, a zadatak (3),(5) **početnim ili Košijevim zadatkom**

Egzistencija rješenja Košijevog zadatka

Košijev zadatak (3), (5) ima rješenje ako postoji okolina $\mathbb{O}(t_0)$ tačke t_0 i rješenje $y = y(t)$ jednačine (3) definisano u $\mathbb{O}(t_0)$, koje zadovoljava početni uslov $y(t_0) = y_0$.

Egzistencija rješenja Košijevog zadatka

Košijev zadatak (3), (5) ima rješenje ako postoji okolina $\mathbb{O}(t_0)$ tačke t_0 i rješenje $y = y(t)$ jednačine (3) definisano u $\mathbb{O}(t_0)$, koje zadovoljava početni uslov $y(t_0) = y_0$.

Jedinstvenost rješenja Košijevog zadatka

Košijev zadatak (3), (5) ima jedinstveno rješenje ako postoji okolina tačke t_0 u kojoj se poklapaju sva rješenja jednačine (3) koja zadovoljavaju početni uslov (5).

Egzistencija rješenja Košijevog zadatka

Košijev zadatak (3), (5) ima rješenje ako postoji okolina $\mathbb{O}(t_0)$ tačke t_0 i rješenje $y = y(t)$ jednačine (3) definisano u $\mathbb{O}(t_0)$, koje zadovoljava početni uslov $y(t_0) = y_0$.

Jedinstvenost rješenja Košijevog zadatka

Košijev zadatak (3), (5) ima jedinstveno rješenje ako postoji okolina tačke t_0 u kojoj se poklapaju sva rješenja jednačine (3) koja zadovoljavaju početni uslov (5).

$$D = \{(t_0, y_0) \in \mathbb{G} : \text{Košijev zadatak (3),(5) ima jedinstveno rješenje}\}$$

naziva se oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja KZ.

Peanova teorema

Ako je $f \in C(\mathbb{G})$ i $(t_0, y_0) \in \mathbb{G}$ tada Košijev zadatak (3),(5) ima rješenje.

Peanova teorema

Ako je $f \in C(\mathbb{G})$ i $(t_0, y_0) \in \mathbb{G}$ tada Košijev zadatak (3),(5) ima rješenje.

Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja

Ako je $f \in C(\mathbb{G})$, $\partial f/\partial y \in C(\mathbb{G})$ i $(t_0, y_0) \in \mathbb{G}$ tada Košijev zadatak (3),(5) ima jedinstveno rješenje.

Peanova teorema

Ako je $f \in C(\mathbb{G})$ i $(t_0, y_0) \in \mathbb{G}$ tada Košijev zadatak (3),(5) ima rješenje.

Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja

Ako je $f \in C(\mathbb{G})$, $\partial f/\partial y \in C(\mathbb{G})$ i $(t_0, y_0) \in \mathbb{G}$ tada Košijev zadatak (3),(5) ima jedinstveno rješenje.

Pikarova teorema

Neka su ispunjeni uslovi:

1) $f \in C(\mathbb{G})$;
2) $\exists k > 0\ \forall (t, y) \in \mathbb{G}$ važi $|\partial f/\partial y| \leq k$;
3) $(t_0, y_0) \in \mathbb{G}$.

Tada Košijev zadatak (3),(5) ima jedinstveno rješenje.

Primjer: Da li $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ zadovoljava uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti?

Primjer: Da li $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ zadovoljava uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti?
Jednačina je napisana u normalnom obliku, pa je $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

Primjer: Da li $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ zadovoljava uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti?
Jednačina je napisana u normalnom obliku, pa je $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

- f je neprekidna na $\mathbb{R}^2$

Primjer: Da li $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ zadovoljava uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti?

Jednačina je napisana u normalnom obliku, pa je $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

- f je neprekidna na $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}$ je neprekidna za $y \neq 0$

Primjer: Da li $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ zadovoljava uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti?

Jednačina je napisana u normalnom obliku, pa je $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

- f je neprekidna na $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}$ je neprekidna za $y \neq 0$

Oblast egzistencije i jedinstvenosti je:

$$D_1 = \{(t_0, y_0) : t \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

Primjer: Da li $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ zadovoljava uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti?

Jednačina je napisana u normalnom obliku, pa je $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

- f je neprekidna na $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}$ je neprekidna za $y \neq 0$

Oblast egzistencije i jedinstvenosti je:

$$D_1 = \{(t_0, y_0) : t \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

$$D_2 = \{(t_0, y_0) : t \in \mathbb{R}, y < 0\}$$

Primjer: Da li $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ zadovoljava uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti?

Jednačina je napisana u normalnom obliku, pa je $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$.

- f je neprekidna na $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}$ je neprekidna za $y \neq 0$

Oblast egzistencije i jedinstvenosti je:

$$D_1 = \{(t_0, y_0) : t \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

$$D_2 = \{(t_0, y_0) : t \in \mathbb{R}, y < 0\}$$

$(0, 0) \notin D_{1/2}$ pa početni zadatak ne zadovoljava uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja KZ.

DJ sa razdvojenim promjenljivim

$$y' = f_1(t)f_2(y)$$

DJ sa razdvojenim promjenljivim

$$y' = f_1(t)f_2(y)$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $f_1 \in C(\mathbb{I})$, $f_2 \in C(\mathbb{J})$, $f_2(y) \neq 0, y \in \mathbb{J}$; $D = \mathbb{I} \times \mathbb{J}$.

DJ sa razdvojenim promjenljivim

$$y' = f_1(t)f_2(y)$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $f_1 \in C(\mathbb{I})$, $f_2 \in C(\mathbb{J})$, $f_2(y) \neq 0, y \in \mathbb{J}$; $D = \mathbb{I} \times \mathbb{J}$.

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t)f_2(y)$$

DJ sa razdvojenim promjenljivim

$$y' = f_1(t)f_2(y)$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $f_1 \in C(\mathbb{I})$, $f_2 \in C(\mathbb{J})$, $f_2(y) \neq 0, y \in \mathbb{J}$; $D = \mathbb{I} \times \mathbb{J}$.

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t)f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(t)dt$$

DJ sa razdvojenim promjenljivim

$$y' = f_1(t)f_2(y)$$

Uslovi egzistencije i jedinstvenosti: $f_1 \in C(\mathbb{I})$, $f_2 \in C(\mathbb{J})$, $f_2(y) \neq 0, y \in \mathbb{J}$; $D = \mathbb{I} \times \mathbb{J}$.

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t)f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(t)dt$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(t)dt + C$$

$$y' = f(at + by + c), \quad a, b, c = const$$

svodi se na DJ sa razdvojenim promjenljivim.

$$y' = f(at + by + c), \quad a, b, c = const$$

svodi se na DJ sa razdvojenim promjenljivim.

- Smjena: $u = at + by + c, u = u(t)$ - nova nepoznata funkcija

$$y' = f(at + by + c), \quad a, b, c = const$$

svodi se na DJ sa razdvojenim promjenljivim.

- Smjena: $u = at + by + c, u = u(t)$ - nova nepoznata funkcija
- $y' = \frac{u' - a}{b}$

$$y' = f(at + by + c), \quad a, b, c = const$$

svodi se na DJ sa razdvojenim promjenljivim.

- Smjena: $u = at + by + c, u = u(t)$ - nova nepoznata funkcija
- $y' = \frac{u'-a}{b}$
- $\frac{u'-a}{b} = f(u)$, tj.

$$y' = f(at + by + c), \quad a, b, c = const$$

svodi se na DJ sa razdvojenim promjenljivim.

- Smjena: $u = at + by + c, u = u(t)$ - nova nepoznata funkcija
- $y' = \frac{u'-a}{b}$
- $\frac{u'-a}{b} = f(u)$, tj.

$$u' = bf(u) + a$$

Homogena DJ prvog reda.

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

Homogena DJ prvog reda.

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

- Smjena: $y = ut, u = u(t)$ - nova nepoznata funkcija

Homogena DJ prvog reda.

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

- Smjena: $y = ut, u = u(t)$ - nova nepoznata funkcija
- $y' = u + u't$

Homogena DJ prvog reda.

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

- Smjena: $y = ut, u = u(t)$ - nova nepoznata funkcija
- $y' = u + u't$
- $u + u't = f(u)$, tj.

Homogena DJ prvog reda.

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

- Smjena: $y = ut, u = u(t)$ - nova nepoznata funkcija
- $y' = u + u't$
- $u + u't = f(u)$, tj.

$$u' = \frac{f(u) - u}{t}$$

$$y' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right), (a_i, b_i) \neq (0,0), i = 1,2.$$

$$y' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right), (a_i, b_i) \neq (0,0), i = 1, 2.$$

$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$

1) $\Delta \neq 0$

$$y' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right), (a_i, b_i) \neq (0,0), i = 1,2.$$

$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$

1) $\Delta \neq 0$
Smjena: $\tilde{t} = t + \alpha$ - nova nezavisno promjenljiva,
$\tilde{y} = y + \beta$ - nova nepoznata funkcija

$$y' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right), (a_i, b_i) \neq (0,0), i = 1, 2.$$

$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$

1) $\Delta \neq 0$
Smjena: $\tilde{t} = t + \alpha$ - nova nezavisno promjenljiva,
$\tilde{y} = y + \beta$ - nova nepoznata funkcija

- α i β izaberemo tako da

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \;\; a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

$$y' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right), (a_i, b_i) \neq (0,0), i = 1,2.$$

$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$

1) $\Delta \neq 0$
Smjena: $\tilde{t} = t + \alpha$ - nova nezavisno promjenljiva,
$\tilde{y} = y + \beta$ - nova nepoznata funkcija

- α i β izaberemo tako da

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \ \ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

Homogena DJ

$$\tilde{y}' = f\left(\frac{a_1\tilde{t} + b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{t} + b_2\tilde{y}}\right) = f_1\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{t}}\right)$$

2) $\Delta = 0$

2) $\Delta = 0$
Tada je $a_1 = \lambda a_2$ i $b_1 = \lambda b_2$, za neko $\lambda \neq 0$, pa je

2) $\Delta = 0$
Tada je $a_1 = \lambda a_2$ i $b_1 = \lambda b_2$, za neko $\lambda \neq 0$, pa je

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2t + b_2y) + c_1}{a_2t + b_2y + c_2}\right)$$

2) $\Delta = 0$
Tada je $a_1 = \lambda a_2$ i $b_1 = \lambda b_2$, za neko $\lambda \neq 0$, pa je

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2 t + b_2 y) + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right)$$

Smjena: $u = a_2 t + b_2 y$, $u = u(t)$ nova nepoznata funkcija

2) $\Delta = 0$
Tada je $a_1 = \lambda a_2$ i $b_1 = \lambda b_2$, za neko $\lambda \neq 0$, pa je

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2 t + b_2 y) + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right)$$

Smjena: $u = a_2 t + b_2 y$, $u = u(t)$ nova nepoznata funkcija

Tada je: $u' = a_2 + b_2 y'$.

2) $\Delta = 0$

Tada je $a_1 = \lambda a_2$ i $b_1 = \lambda b_2$, za neko $\lambda \neq 0$, pa je

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2 t + b_2 y) + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right)$$

Smjena: $u = a_2 t + b_2 y$, $u = u(t)$ nova nepoznata funkcija

Tada je: $u' = a_2 + b_2 y'$.

DJ sa razdvojenim promjenljivim

$$u' = a_2 + b_2 f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right)$$